



sketchometry

Herausgeber

Universität Bayreuth

Forschungsstelle für Mobiles Lernen mit digitalen Medien

sketchometry

Universitätsstraße 30

95447 Bayreuth

Internet

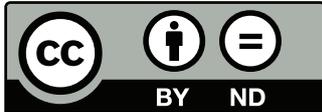
<http://heftreihe.sketchometry.org>



Lizenz

Diese Publikation ist unter folgender Lizenz erschienen:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/>



Titel

sketchometry

Heft

13

Mathematik mit dem Zeigefinger

Autor

Peter Baptist

Forschungsstelle für Mobiles Lernen mit digitalen Medien

Universität Bayreuth

Erscheinungsjahr

2022

ISSN

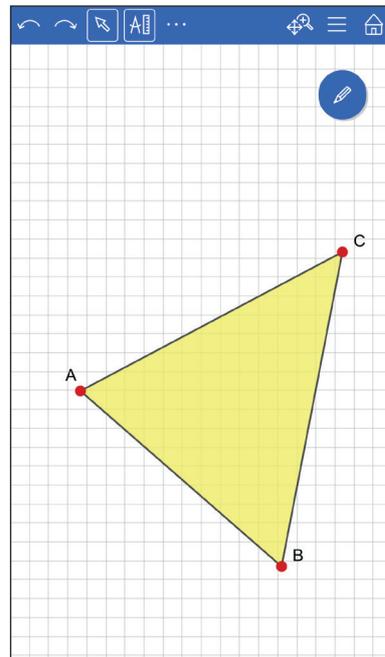
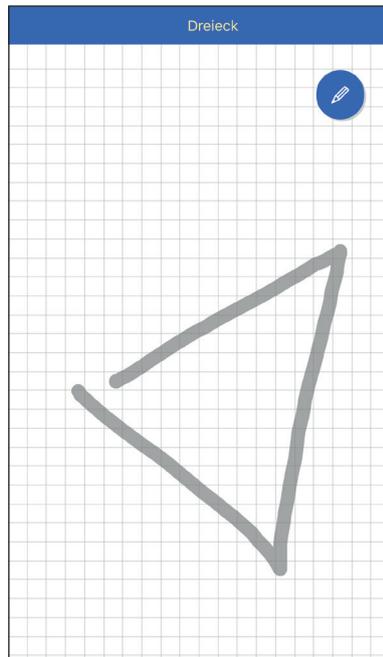
2364-5520

Mathematik mit dem Zeigefinger

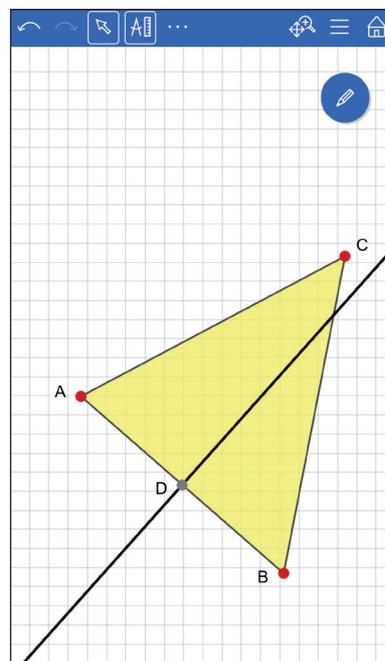
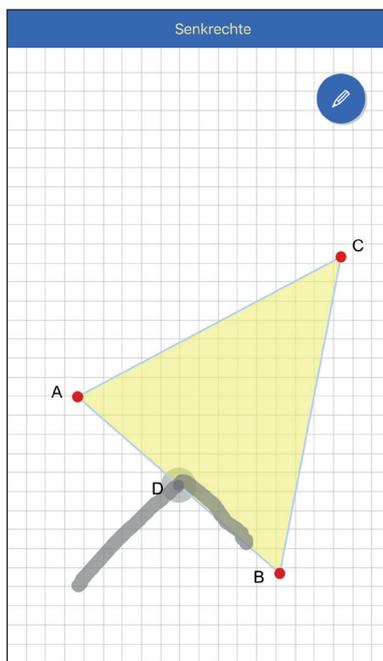
Das Zeichnen mit dem Finger war in der Antike eine gebräuchliche Methode, um Überlegungen zu veranschaulichen bzw. festzuhalten. Es gab weder Papier noch Stift, um rasch eine Skizze anzufertigen, stattdessen zeichneten die damaligen Geometer mit dem Finger Figuren in eine geglättete Sandfläche. Bekannt ist die Anekdote über das tragische Ende des Archimedes (ca. 287 v. Chr. – 212 v. Chr.) bei der Eroberung der sizilianischen Hafenstadt Syrakus durch die Römer. Während die Soldaten in der Stadt plünderten, befasste sich Archimedes intensiv mit geometrischen Überlegungen. Ein Legionär stürmte in das Haus des Gelehrten und zerstörte die in den Sand gezeichneten geometrischen Figuren. Zornig beschwerte sich Archimedes angeblich mit den Worten „Noli turbare circulos meos“. Daraufhin erschlug ihn der Soldat, sehr zum Missfallen seines Generals Marcellus. Denn dieser wollte unbedingt Archimedes gefangen nehmen, damit künftig die Römer von dessen Ingenieurskunst profitieren könnten.

Im Gegensatz zu Skizzen bzw. Konstruktionen auf Papier sind Skizzen im Sand sehr ungenau, sie konnten den antiken Wissenschaftlern lediglich als Grundlage für Überlegungen dienen. Die Geometrie selbst fand in den Köpfen statt. Geometrie etablierte sich daher als abstrakte Wissenschaft.

Zeichengeräte und Materialien haben sich im Laufe der Jahrhunderte aufgrund der technischen Fortschritte geändert. Dennoch wird im 21. Jahrhundert das Zeichnen mit dem Finger im Mathematikunterricht wieder propagiert. Allerdings dient als Zeichenfläche nicht mehr geglätteter Sand. Die Fingerskizzen werden auf einer Tablet- bzw. Smartphone-Oberfläche ausgeführt und mit Hilfe der Software sketchometry unmittelbar in akkurate Figuren umgewandelt, wie das nachfolgende Beispiel für das Zeichnen eines Dreiecks zeigt.



Intuitive Gesten, die ebenfalls mit dem Zeigefinger ausgeführt werden, sind das charakteristische Merkmal von sketchometry. Mithilfe der Senkrechten-Geste wird beispielsweise durch den Mittelpunkt der Seite \overline{AB} des Dreiecks die Mittelsenkrechte eingezeichnet.





Gesten ersetzen bei sketchometry somit die üblichen Werkzeuge der herkömmlichen dynamischen Software. Außerdem lassen sich mit einem bzw. zwei Fingern geometrische Objekte „anfassen“ und kontinuierlich verändern. Die Lernenden sehen sofort, was sie tun. Smartphone bzw. Tablet mit der entsprechenden Software erweisen sich als ideales Skizzenwerkzeug u. a. zum forschend-entdeckenden Lernen.

Finger sind schon immer ein gern eingesetztes Werkzeug beim Lernen. So nehmen Kleinkinder sowie Kinder im Anfangsunterricht in der Grundschule beim Addieren und Subtrahieren von Zahlen oftmals ihre Finger zu Hilfe. Auch das Abzählen von Mengen fällt ihnen unter Verwendung eines Fingers leichter. Um kein Element zu vergessen, deuten Kinder mit dem Zeigefinger auf die einzelnen Objekte.

Die Fingertechnik bietet noch weitere Vorteile. In den letzten Jahren haben australische Wissenschaftler in mehreren Studien nachgewiesen, dass das Nachzeichnen von Figuren mit dem Zeigefinger beim Lösen mathematischer Probleme helfen kann. So hatten Schulkinder aus Sydney im Alter zwischen neun und dreizehn Jahren beim Lösen von geometrischen Aufgaben weniger Schwierigkeiten, wenn sie die zugehörigen Texte nicht nur aufmerksam lesen, sondern zusätzlich angehalten werden, bestimmte Aufgabenelemente, wie z. B. Winkel an Geradenkreuzungen, mit dem Zeigefinger nachzufahren. Die Ergebnisse der Forschergruppe um Paul Ginns (Universität Sydney) legen nahe, dass das Lernen von Mathematik verbessert werden kann, wenn der Lernprozess durch Nachverfolgen mit dem Finger ergänzt wird. *“Our findings have a range of implications for teachers and students alike. They show maths learning by young students may be enhanced substantially with the simple addition of instructions to finger-trace elements of maths problems,”* stellt Paul Ginns fest (vgl. [3]).

Die Forscher gehen davon aus, dass das Deuten mit dem Finger bzw. das Nachzeichnen der Winkel eines Dreiecks mit dem Zeigefinger die Aufmerksamkeit erhöht und somit dieser Information im Gehirn eine Verarbeitungspriorität eingeräumt wird. Das Nachfahren mit dem Finger könne zudem die Belastung des Arbeitsgedächtnisses reduzieren und die Fähigkeit verbessern, komplexere Informationen besser zu behalten, da neben der visuellen Wahrnehmung weitere Gehirnregionen aktiviert werden. *“At the classroom level, teachers can assist students to learn new mathematical content by giving instructions to ‘trace over’ the important elements of worked examples that already appear in mathematics textbooks or worksheets. This simple, zero-cost teaching approach can enhance the effectiveness of mathematics instruction across multiple areas of the subject,”* schreibt Paul Ginns (vgl. [3]). Zudem vermutet er aufgrund einer Studie mit Medizinstudierenden, dass auch Erwachsene nachhaltiger und verständnisvoller lernen, wenn der Lehrstoff nicht nur visuell und akustisch dargeboten, sondern wenn dessen Vermittlung zusätzlich durch Gesten unterstützt wird (vgl. [5]).

Das „Lernen mit dem Finger“ hat bereits Maria Montessori (1870–1952) Anfang des 20. Jahrhunderts propagiert. Zum Lernen des Alphabets verwendete sie Buchstaben aus Schmirgelpapier. Die Kinder hören die Buchstaben, die der Lehrer vorspricht, betrachten gleichzeitig deren Aussehen und fahren sie mit dem Zeigefinger nach. Für die Effizienz dieser Vorgehensweise hatte

sketchometry

man damals keine Nachweise, man verließ sich einfach auf die Intuition. Erst spätere Studien belegten, dass das Nachzeichnen mit dem Finger beim Erkennen von Buchstaben und geometrischen Formen hilfreich ist.

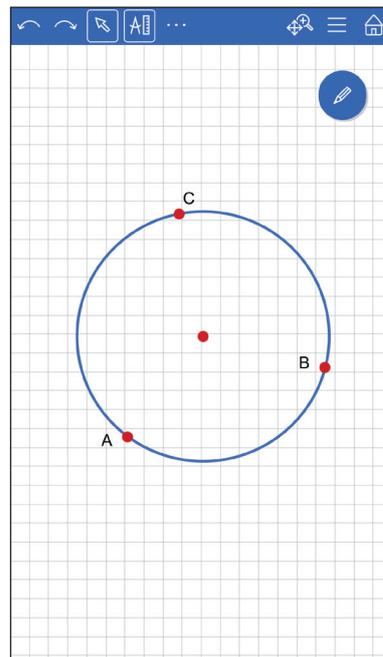
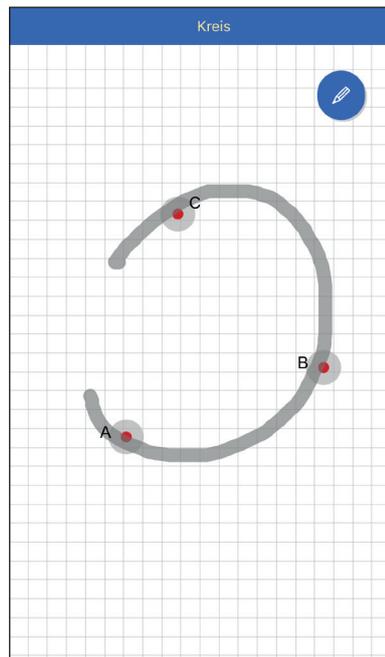
Nach neuesten Erkenntnissen können geeignete Gesten auch das Lernen einer Fremdsprache erleichtern. Wer neben den traditionellen Lerntechniken wie Lesen, Schreiben, Hören und Nachsprechen noch zusätzlich mit den Armen gestikuliert, kann besser Vokabeln im Gedächtnis speichern, denn die Vernetzung mit motorischen Hirnarealen stärkt das Wortgedächtnis. Zu diesem Ergebnis gelangt ein Forschungsteam des Leipziger Max-Planck-Instituts für Kognitions- und Neurowissenschaften. Im »Journal of Neuroscience« plädieren die Forscher daher für den Einsatz von Lerntechniken, die das motorische System des Körpers einbeziehen (vgl. [2]). Ein anderes Team des Max-Planck-Instituts hat herausgefunden, dass Gesten die Erinnerung an Wörter besonders fördern, wenn sie die Bedeutung des Worts bildhaft darstellen. Neben der motorischen Komponente scheint somit auch sinnliche Erfahrung der Wortbedeutung eine Rolle zu spielen.

Die Software sketchometry nutzt diese Vorteile der Vernetzung mit motorischen Hirnregionen beim Lernen und Verstehen von Mathematik. Gesten ersetzen bei sketchometry die sonst üblichen Werkzeuge dynamischer Geometriesoftware. Mit dem Finger zeichnen Schülerinnen und Schüler Figuren, die automatisch in eine akkurate Darstellung umgewandelt werden. Das sketchometry Entwicklerteam hat darauf geachtet, dass diese Gesten optisch nahe am zu erzeugenden Objekt sind (z. B. Winkel, Senkrechte, Tangente an eine Kurve, Parallele zu einer Geraden, Spiegelung an einer Geraden, ...). Diese Gesten sind für Schülerinnen und Schüler intuitiv und daher leicht zu behalten.

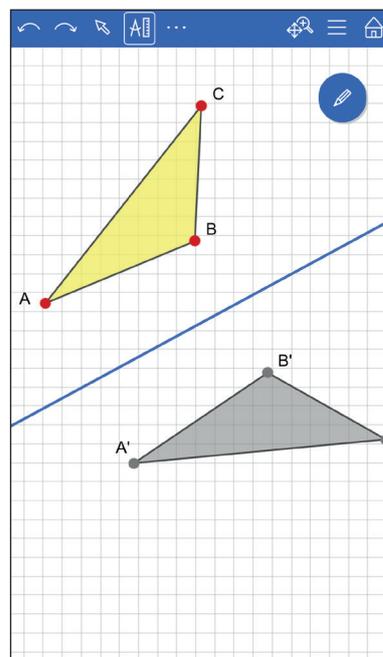
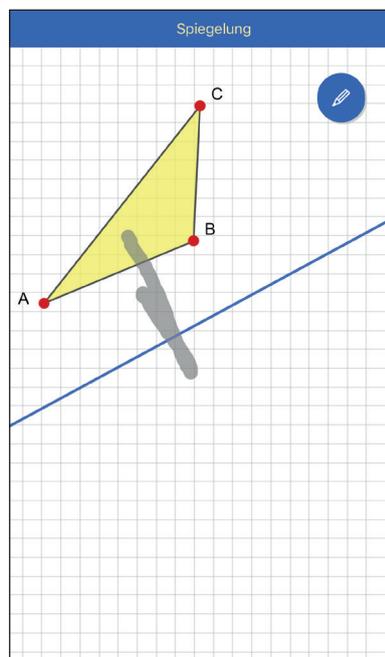


Die feinmotorischen Bewegungen des Fingers beim Skizzieren der Gesten bezieht Hirnregionen in den Lernprozess mit ein, die beim Anklicken eines Icons oder eines Elements einer Menülisse nicht aktiviert werden. Denn das Anklicken ist immer der gleiche Vorgang, unabhängig welche geometrische Aktivität dadurch initiiert wird. Die Gesten dagegen unterscheiden sich voneinander, jeweils abhängig von der gewünschten Konstruktion.

Soll beispielsweise ein Kreis durch drei gegebene Punkte gezeichnet werden, so deutet man den Kreis mit einer entsprechenden Geste durch die drei Punkte an. Die Lernenden führen unmittelbar mit ihrem Zeigefinger bewusst eine kreisförmige Bewegung aus. Als „Zugabe“ erzeugt das Programm gleichzeitig mit der Kreislinie den zugehörigen Kreismittelpunkt.



Die Geste für die Spiegelung ist eine Vor-Zurück-Bewegung über die Spiegelachse hinaus. Das zu spiegelnde Objekt kann ein einzelner Punkt, eine Gerade, eine Strecke oder auch eine Figur sein. In dem nachfolgenden Beispiel wird ein Dreieck an einer Geraden gespiegelt. Die Bewegung beginnt in dem zu spiegelnden Objekt, überstreicht die Spiegelachse und kehrt zurück.



Solche Gesten sind die wesentlichen Elemente von sketchometry. Die Software kommt deshalb ohne eine komplexere Menüstruktur aus. Dies erweist sich gerade auf kleinen Bildschirmen als vorteilhaft. Daher eignet sich sketchometry besonders gut für den Einsatz auf Smartphones.

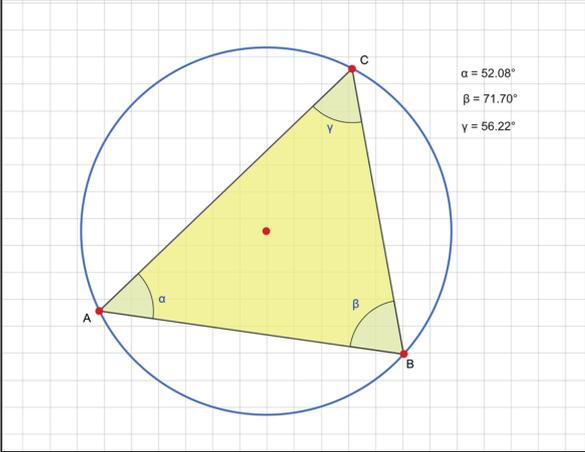
Die Ergebnisse der australischen und Leipziger Forscher legen nahe, dass die positiven Lerneffekte durch das Vernetzen mit motorischen Hirnarealen auch für das Fach Mathematik zutreffen, wenn die Schülerinnen und Schüler mit sketchometry arbeiten. Denn sie benutzen den Zeigefinger zum Erstellen ihrer Konstruktionen und beim Anwenden der intuitiven sketchometry-Gesten. Die dynamischen Möglichkeiten der Software werden genutzt, wenn die erstellten Konfigurationen durch Ziehen mit dem Zeigefinger modifiziert werden, um bestimmte Eigenschaften oder Beziehungen zu entdecken.

Bei der Erkundung der Lage des Umkreismittelpunkts eines Dreiecks in Abhängigkeit von der Gestalt des Dreiecks lassen sich die genannten Vorteile des Arbeitens mit dem Zeigefinger deutlich erkennen. Das entsprechende Arbeitsblatt ist in die beiden Phasen Konstruieren bzw. Erkunden unterteilt.

Lage des Umkreismittelpunkts – Arbeitsblatt

Konstruieren

- ▶ Zeichne ein Dreieck und markiere die Innenwinkel.
- ▶ Miss die Innenwinkel und platziere die Messwerte neben das Dreieck.
- ▶ Zeichne den Umkreis des Dreiecks.
Hinweis: Der Mittelpunkt wird dabei automatisch erzeugt.



Erkunden

- ▶ Ziehe an Eckpunkten des Dreiecks und beobachte dabei die Lage des Umkreismittelpunkts. Unterscheide: innerhalb oder außerhalb des Dreiecks, auf einer Dreiecksseite.
- ▶ Notiere deine Beobachtungen in Abhängigkeit von der Art des Dreiecks (spitz-, stumpf-, rechtwinklig).



Die Lernenden verwenden jeweils den Finger, um das Dreieck zu zeichnen, um die Innenwinkel zu markieren und die Platzierung der Messwerte auf der Zeichenebene festzulegen sowie zum Skizzieren des Kreises durch die drei Eckpunkte. Das Verändern der Gestalt des Dreiecks erfolgt wiederum mit Hilfe des Zeigefingers, indem einer der Eckpunkte mit dem Finger berührt und dann an dem Punkt gezogen wird. Bei allen relevanten Konstruktionsschritten und Überlegungen geht es nicht nur um visuelle Wahrnehmung, sondern es sind immer auch motorische Hirnareale beteiligt.

Neben den geschilderten Vorzügen des Lernens mit dem Finger erweisen sich Arbeitsblätter mit Aufträgen zum Erkunden aus einem weiteren Grund als vorteilhaft für den Unterricht: Mathematik entpuppt sich als experimentelles Fach. Denn die Schülerinnen und Schüler bekommen keine fertigen Ergebnisse präsentiert, sondern werden angeleitet, selbst auf Entdeckungsreise zu gehen. Zudem können sie ihr Lerntempo weitgehend eigenständig bestimmen. Um die individuellen Aufzeichnungen im Rahmen der Erkundungsphase zu erleichtern, kann man als Ergänzung zu jedem Arbeitsblatt ein sog. Ergebnisblatt erstellen. Durch entsprechende Textvorgaben lassen sich die zu erwartenden Eintragungen übersichtlich strukturieren. Im Unterricht schließt sich an die Konstruktions- und Erkundungsphase ein gemeinsames Besprechen der erzielten Erkenntnisse an. Diese Vorgehensweise orientiert sich an dem bewährten Dreischritt ich – du – wir. Abgeschlossen wird das jeweils behandelte Thema mit einer lehrerzentrierten Instruktionsphase, in der u.a. die besprochenen Inhalte zusammengefasst und eventuell notwendige Ergänzungen vorgenommen werden.

Mit dem Arbeits- und dem Ergebnisblatt hat man bereits die ersten beiden Bestandteile eines sog. sketchometry-Unterrichtsbausteins. Die folgende Übersicht zeigt den strukturellen Aufbau eines solchen Bausteins.

Thema des Unterrichtsbausteins

1. Informationsblatt für Lehrkräfte

- Voraussetzungen und Ziele für das Schülerarbeitsblatt
- Hinweise zu sketchometry: Angabe der für das Arbeitsblatt benötigten Gesten

2. Schülerarbeitsblatt

- Anweisungen zum Konstruieren
- Aufträge zum Erkunden, Experimentieren und Dokumentieren

3. Ergebnisblatt

- Vorgegebene Struktur als Hilfe zum übersichtlichen Dokumentieren der Ergebnisse der Erkundungs- und Experimentieraufträge
- Möglichkeit für eigenständige Aufzeichnungen

4. Übungsblatt

- Aufgaben zum Einüben bzw. Vertiefen der Thematik des Schülerarbeitsblatts, wobei die Aufgaben nur zum Teil mit sketchometry zu lösen sind
- Weiterführende Aufgabenstellungen
- Zusätzliche thematische Anregungen

5. Video zum Schülerarbeitsblatt

Mit dem Konzept der „sketchometry-Unterrichtsbausteine“ soll – unterteilt in die Phasen Konstruieren, Erkunden, Dokumentieren, Diskutieren, Präsentieren – eigenständiges Arbeiten gefördert werden. Ein Beispiel zur Thematik „Winkelsumme im Dreieck“ sowie Anregungen zum Unterrichten mit sketchometry finden sich in [1]. Sukzessive lässt sich eine Sammlung von Unterrichtsbausteinen erstellen und anschließend zu einem Lehrwerk zusammenführen. Tablet bzw. Smartphone erweisen sich bei dieser Vorgehensweise als ein Lernwerkzeug, das Schülerinnen und Schüler zum Skizzieren und Entdecken nutzen. Ein nicht zu unterschätzender Vorteil besteht darin, dass die Lernenden mit eigenen Geräten arbeiten können und man somit nicht auf eine spezielle Ausstattung der Schulen angewiesen ist.



Fazit

Wer den Zeigefinger der Tastatur und der Maus vorzieht, ist im Vorteil. Die innovative Software sketchometry in Verbindung mit dem Konzept der Unterrichtsbausteine fördert das Lehren und Lernen im Fach Mathematik.

Literatur

- [1] Angermüller, Theresa und Peter Baptist: Lehren und Lernen mit sketchometry-Arbeitsblättern. MNU-Journal, Jg. 74, Heft 3, S. 206–211, 2021

- [2] Brian Mathias, Andrea Waibel, Gesa Hartwigsen, Leona Sureth, Manuela Macedonia, Katja M. Mayer, and Katharina von Kriegstein: Motor Cortex Causally Contributes to Vocabulary Translation following Sensorimotor-Enriched Training. Journal of Neuroscience 13 October 2021, 41 (41) 8618-8631; DOI: <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.2249-20.2021>

- [3] Fang-Tzu Hu, Paul Ginns, Janette Bobis: Getting the point: Tracing worked examples enhances learning. Learning and Instruction, vol. 35, pp. 85–93, 2015

- [4] Ginns Paul, Fang-Tzu Hu, Erin Byrne, and Janette Bobis: Learning by Tracing Worked Examples. Applied Cognitive Psychology, vol. 30, pp. 160–169, 2016

- [5] Lucy Macken, Paul Ginns: Pointing and tracing gestures may enhance anatomy and physiology learning. Medical Teacher, vol. 36, issue 7, pp. 596–601, 2014

Author

Prof. Dr. Peter Baptist

FoSt Mobiles Lernen mit digitalen Medien

Universität Bayreuth

95440 Bayreuth

peter.baptist@uni-bayreuth.de

<http://sketchometry.org>



sketchometry